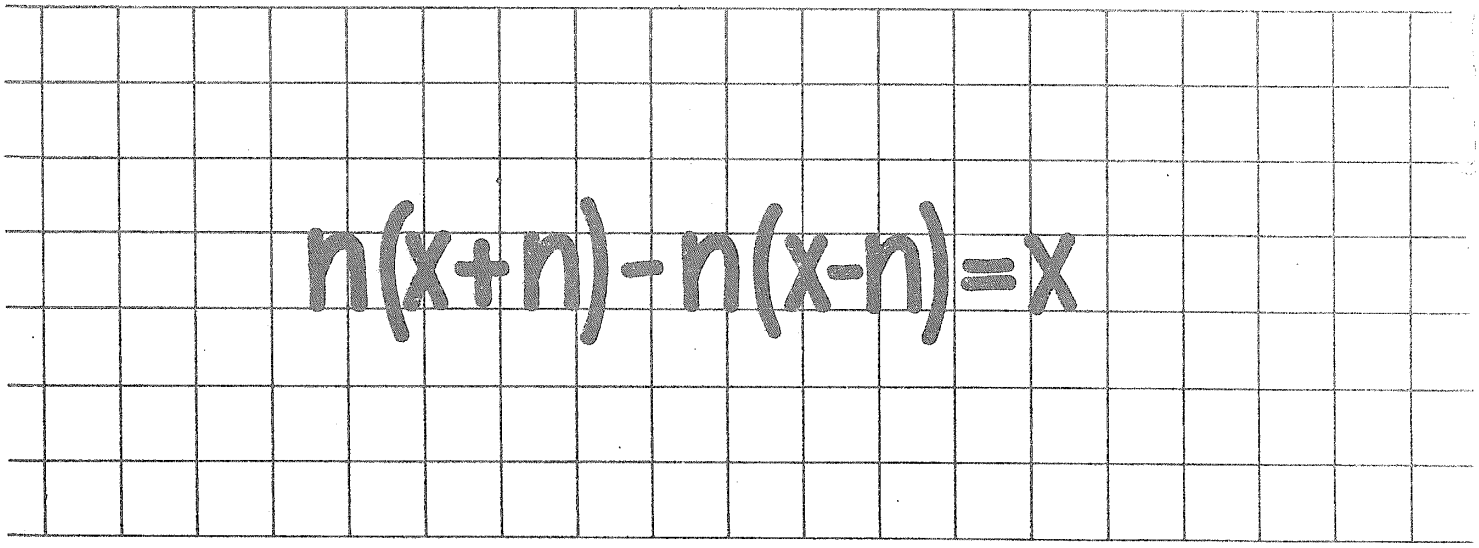
LA ECUACIÓN COMO MODELO MATEMÁTICO

Obras que integran el bloque 2 *(Álgebra. Modelos)*

1. ***La ecuación como modelo matemático***
2. Ecuaciones de primer grado
3. Sistemas de ecuaciones de primer grado
4. Desigualdades de primer grado
5. Ecuaciones de segundo grado
6. Desigualdades de segundo grado
7. La relación como modelo matemático
8. Funciones
9. Funciones exponenciales
10. Funciones logarítmicas
11. Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas
12. Resolución de problemas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 2

Àlgebra. Modelos

Módulo 1

LA ECUACIÓN COMO MODELO MATEMÁTICO

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
LA ECUACIÓN COMO MODELO MATEMÁTICO
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1985
ISBN 968-24-1515-2

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

1.1 La situación y el modelo matemático 9

1.2 La ecuación como representación de una proposición abierta 18

1.3 Práctica de sustitución* 37

1.4 Conjunto solución 53

1.5 Ecuaciones equivalentes 70

1.6 Ecuaciones algebraicas 90

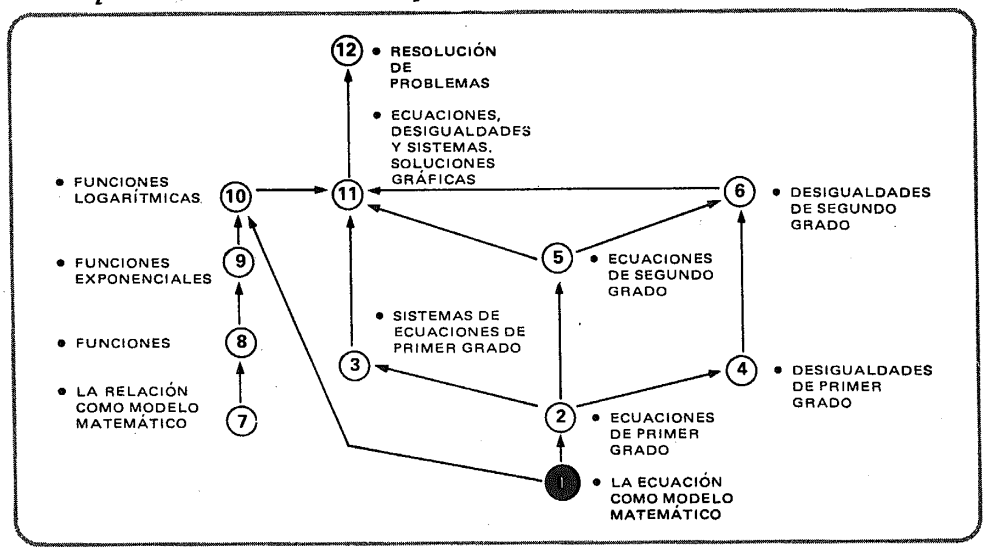
OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 2. Álgebra. Modelos

Objetivos: establecer, resolver y aplicar a situaciones reales las siguientes clases de modelos matemáticos:

- ecuaciones y desigualdades (lineales o cuadráticas)
- sistemas de ecuaciones o desigualdades
- relaciones y funciones

Esquema estructural del bloque 2



Módulo 1. La ecuación como modelo matemático

Objetivos: interpretar una ecuación como una proposición abierta de igualdad

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Concepto de número		
– entero	1	3
– racional	1	10
– real	1	12
– complejo	1	14
• Manejo de números		
– enteros	1	4
– racionales	1	11
– reales	1	13
– complejos	1	14
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	5, 6, 7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13

1.1

La situación y el modelo matemático

1

Intentemos resolver mentalmente este acertijo:

En cierta ocasión, mi abuelo dijo a sus amigos:

"Si toman 6 veces la edad que tendré dentro de 6 años y le restan 6 veces la edad que tenía hace 6 años obtendrán la edad que tengo ahora."

2

Un momento después, mi padre intervino diciendo:

"Es curioso, pero si toman 5 veces la edad que tendré dentro de 5 años y le restan 5 veces la edad que tenía hace 5 años obtendrán precisamente la edad que tengo ahora."

3

Yo, para no ser menos, dije:

"Pues, si toman 3 veces la edad
que tendré dentro de 3 años
y le restan 3 veces la edad que
tenía hace 3 años obtendrán ni
más ni menos, la edad que
tengo ahora."

Entonces,
¿cuántos años tenemos: mi abuelo, mi padre y yo?

4

Si queremos resolver

matemáticamente,

este acertijo necesitamos en
primer lugar,

excluir, separar, hacer caso omiso de

la información que no ha de
conducirnos a la solución del
problema, y

efectuar una traducción

del lenguaje corriente al lenguaje matemático.

5

Entonces,
determinemos
la
información esencial.

6

En cierta ocasión, mi abuelo, dijo a sus amigos:

"Si toman 6 veces la edad que tendré dentro de 6 años y le restan 6 veces la edad que tenía hace 6 años, obtendrán la edad que tengo ahora."

7

Un momento después, mi padre intervino diciendo:

Es curioso, pero si toman 5 veces la edad que tendré dentro de 5 años y le restan 5 veces la edad que tenía hace 5 años obtendrán precisamente la edad que tengo ahora.

8

Yo, para no ser menos, dije:

Pues, si toman 3 veces la edad que tendré dentro de 3 años y le restan 3 veces la edad que tenía hace 3 años obtendrán, ni más ni menos, la edad que tengo ahora.

Entonces,
¿cuántos años tenemos: mi abuelo, mi padre y yo?

9

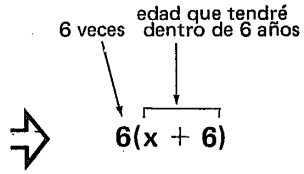
Intentemos, ahora,
hacer la traducción
al

lenguaje matemático.

10

En el caso del abuelo,
llamemos **x** a su edad actual:

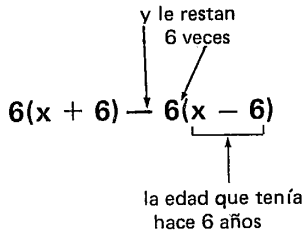
- si toman 6 veces la edad que tendré dentro de 6 años



- y le restan 6 veces la edad que tenía hace 6 años

$$6(x + 6) - 6(x - 6)$$

11



- obtendrán la edad que tengo ahora:

$$6(x + 6) - 6(x - 6) = x$$

12

Si toman 6 veces la edad que tendré dentro de 6 años

$$\underbrace{6(x + 6)}_{\text{6 veces la edad que tendré dentro de 6 años}} - \underbrace{6(x - 6)}_{\text{6 veces la edad que tenía hace 6 años}} = \underbrace{x}_{\text{edad que tengo ahora}}$$

- y le restan 6 veces la edad que tenía hace 6 años,
- obtendrán la edad que tengo ahora.

13

El padre:

"Si toman 5 veces la edad que tendré dentro de 5 años y le restan 5 veces la edad que tenía hace 5 años, obtendrán la edad que tengo ahora."
Podemos escribir para el padre, siendo y = su edad actual:

$$5(y + 5) - 5(y - 5) = y$$

14

El hijo:

"Si toman 3 veces la edad que tendré dentro de 3 años y le restan 3 veces la edad que tenían hace 3 años, obtendrán la edad que tengo ahora."
Podemos escribir para el hijo, siendo z = su edad actual:

$$3(z + 3) - 3(z - 3) = z$$

15

En resumen:

- para el abuelo:

$$6(x + 6) - 6(x - 6) = x$$

- para el padre:

$$5(y + 5) - 5(y - 5) = y$$

- para el hijo:

$$3(z + 3) - 3(z - 3) = z$$

16

Observar con atención:

$6(x + 6) - 6(x - 6) = x$

$5(x + 5) - 5(x - 5) = x$

$3(x + 3) - 3(x - 3) = x$

Forma general:

$n(x + n) - n(x - n) = x$

- Para el abuelo $n = 6$
- Para el padre $n = 5$
- Para el hijo $n = 3$

17

$$n(x + n) - n(x - n) = x$$

Esto es lo que llamamos
un **modelo matemático**
de la **situación,**
al cual hemos llegado
a través de un proceso
de **abstracción,** es decir,
de separación, de exclusión,
de lo no esencial.

18

En forma esquemática:

Abstracción
y traducción al lenguaje algebraico

19

Ya estamos familiarizados con el significado y uso de algunos **símbolos:**

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...

+ − x ÷ $\sqrt[n]{\ }$ **= > < ⩾ ⩽ ≠**

a b c d e f ... x y z

( ) [ ] { } $\lceil\ \rceil$

etcétera ...

20

Contamos con un conjunto de

reglas

para manejar los símbolos

Estas reglas son de dos clases:

reglas de formación

y

reglas de transformación

21

Las

reglas de formación

nos permiten escribir correctamente un modelo como este:

$$n(x + n) - n(x - n) = x$$

22

Las **reglas de transformación** nos permitirán hacer las modificaciones necesarias para llevar la expresión

$n(x + n) - n(x - n) = x$ a la forma $x = 2n^2$ que nos dice que:

- la edad del abuelo es: $2(6)^2 = 2x36 = 72$ años
- la edad del padre es: $2(5)^2 = 2x25 = 50$ años
- la edad del hijo es: $2(3)^2 = 2x9 = 18$ años

23

Las **transformaciones** efectuadas en nuestro modelo fueron:

- estado inicial: ⟶ $\boxed{n(x + n) - n(x - n) = x}$
- 1ª transformación efectuando las multiplicaciones indicadas.
- 1er estado intermedio: ⟶ $\boxed{nx + n^2 - nx + n^2 = x}$
- 2ª transformación, reduciendo los términos semejantes.
- 2º estado intermedio: ⟶ $\boxed{2n^2 = x}$
- 3ª transformación, intercambiando los miembros.
- Estado final: ⟶ $\boxed{x = 2n^2}$

24

Al efectuar la

traducción

del **lenguaje corriente**

al

lenguaje algebraico

formamos

expresiones algebraicas.

25

En el modelo que hemos construido, obtuvimos

una igualdad de dos expresiones algebraicas

que aprenderemos a identificar como

ecuación.

$$\underbrace{n(x + n) - n(x - n)}_{\text{expresión algebraica 1}} = \underbrace{x}_{\text{expresión algebraica 2}}$$

2.1.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* una ecuación como un modelo matemático, construido a partir de una situación real dada, por un proceso de abstracción y traducción.

1.2

La ecuación como representación de una proposición abierta

26

He aquí una expresión algebraica

$$5 + 3 = 8$$

que leemos

"cinco más tres es igual a ocho"

27

Otra expresión algebraica:

$$9 - 3 < 10$$

que leemos

"nueve menos tres es menor que diez"

28

$4 > 7$

se lee

"cuatro es mayor que siete"

29

$5 \geqslant 2$

se lee

"cinco es mayor o igual a dos"

30

$15 \neq 8$

se lee

"quince no es igual a ocho"

o

"quince es diferente de ocho"

31

$6 \not> 2$

se lee

"seis no es mayor que dos"

2.1.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

32

Las expresiones de este tipo,

representan
proposiciones algebraicas

en las que

afirmamos algo

que puede ser verdadero o falso.

$5 + 3 = 8$

$9 - 3 < 10$

$4 > 7$

$5 \geqslant 2$

$15 \neq 8$

$6 \not> 2$

33

La proposición

$8 + 5 > 7$

es comparable con la proposición

Enrique tiene dieciocho años

ya que por medio de ambas afirmamos algo que puede ser **verdadero** o **falso.**

34

En cambio, a través de las dos expresiones siguientes **no** afirmamos nada

- $8 + 5$
- **El padre de Enrique**

No
representan proposiciones.

35

Señalar las expresiones que representan **proposiciones:**

1. El libro de Raúl
2. $5 + 4(6 - 3) + 3(10 - 4)$
3. Romeo y Julieta
4. $2 = 1$
5. $3 + 5 + 7 \geqslant 15$
6. El padre de Enrique tiene cincuenta años
7. ¡No me molestes!
8. 2001
9. $1000 \neq 100$
10. $4 \times 5 = 20$

4. $2 = 1$
5. $3 + 5 + 7 \geqslant 15$
6. El padre de Enrique tiene cincuenta años
9. $1000 \neq 100$
10. $4 \times 5 = 20$

36

He aquí algunas **proposiciones;***
indicar cuáles son **verdaderas**
y cuáles **falsas**, de acuerdo con nuestros conocimientos:

1. $5 \geqslant 2$	V / F	V
2. $(-2) < (-1)$	V / F	V
3. $(-4) \times (-2) = -8$	V / F	F
4. $1 \neq 0$	V / F	V
5. $5 + 4 = 9$	V / F	V

* Usaremos a veces, por razones de brevedad, el término "proposición" para designar a una "expresión representativa de una proposición"

2.1.2.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

37

Ahora bien,
cuando escribimos

$$x + 2 = 5$$

debemos suponer que la literal **x**
podrá ser sustituida por

cualquier elemento
de un conjunto dado.
Llamaremos
indeterminada o **variable**
a un símbolo de este tipo

38

$\textcircled{x} + 2 = 5$

x representa a un número no determinado al que llamamos

indeterminada x o variable x.

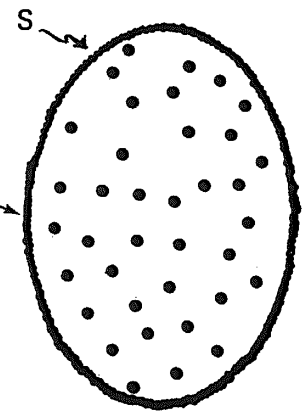
39

Podemos hablar, entonces, de **el conjunto de sustitutos permisibles para la indeterminada o variable x.**

En la ecuación

$x + 2 = 5$

éste sería **un sustituto no permisible** para la indeterminada o variable x.



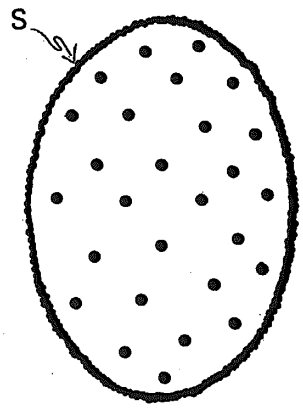
40

$x + 2 = 5$

La indeterminada o variable x

puede ser sustituida

por cualquier elemento del conjunto S.



41

La expresión

$$x + 2 = 5$$
$$x \in \mathbb{Z}^*$$

conjunto de sustitutos permisibles

¿representa una proposición verdadera?

Sí/No

$^*\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ es un número entero}\}$

No podemos afirmar que $x + 2 = 5$ represente una proposición verdadera o falsa; la respuesta depende del número (elemento de $\mathbb{Z}$) que consideremos como sustituto de x.

42

$$x + 2 = 5$$
$$x \in \mathbb{Z}$$

Si $x = -3$	la proposición es	V/F
Si $x = -1$	la proposición es	V/F
Si $x = 0$	la proposición es	V/F
Si $x = 1$	la proposición es	V/F
Si $x = 3$	la proposición es	V/F

Respuesta en el cuadro siguiente

Proposición general: $x + 2 = 5$

Proposiciones particulares

Si $x = -3$	$[-3] + 2 = 5$	$-1 = 5$	F
Si $x = -1$	$[-1] + 2 = 5$	$1 = 5$	F
Si $x = 0$	$[0] + 2 = 5$	$2 = 5$	F
Si $x = 1$	$[1] + 2 = 5$	$3 = 5$	F
Si $x = 3$	$[3] + 2 = 5$	$5 = 5$	V

43

Nos damos cuenta de que la

proposición general → $x + 2 = 5$

no es verdadera ni falsa,
sin embargo, "puede generar"
una serie de **proposiciones particulares**
que **sí** son verdaderas o falsas.

44

A una proposición como

$$x + 2 = 5$$

le llamamos

proposición abierta.

45

Y a proposiciones como

$$1 = 5, \quad 1 + 2 = 3, \quad 5 = 5$$

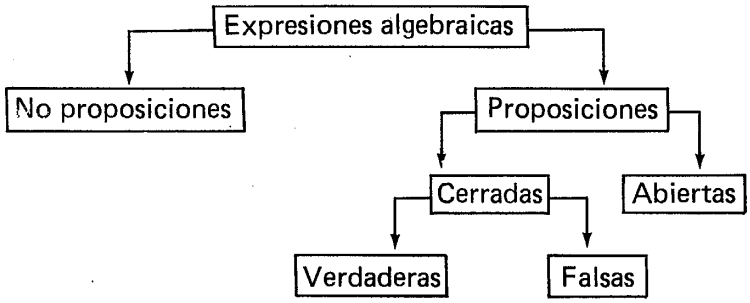
$$5 > 3, \qquad 0 < 1, \quad 6 \neq 5$$

les llamaremos

proposiciones cerradas.

46

Observemos con atención este esquema.



47

He aquí algunas expresiones algebraicas:

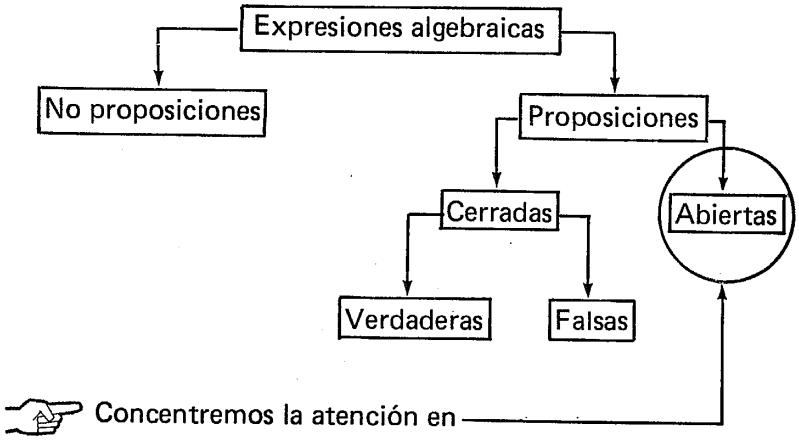
1. $3(5 + 7) > 15$ ⌊___⌋ PCV
2. $3x + 4 = 19$ ⌊___⌋ PA
3. $5x - 7$ ⌊___⌋ NP
4. $5 + 3 + 4 \leqslant 5$ ⌊___⌋ PCF
5. $4(5 - 3) + 8 - 2$ ⌊___⌋ NP

Indicar en la casilla correspondiente si se trata de una no proposición **(NP)**, de una proposición abierta **(PA)**, de una proposición cerrada verdadera **(PCV)**, o de una proposición cerrada falsa **(PCF)**.

2.1.2.3

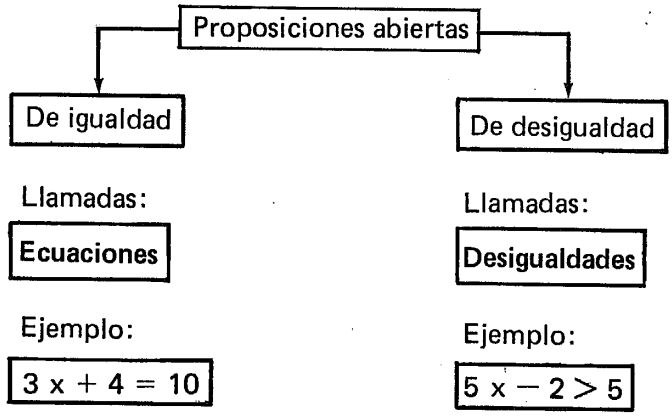
Práctica adicional,
si
se considera necesario.

48



49

Consideraremos **dos** clases de proposiciones abiertas:



50

En una **ecuación** como esta:

3 x + 4 = 10

a la literal x le hemos llamado

_____

o

_____

indeterminada

variable

51

Y hemos dicho que
la **indeterminada**
o variable (x)
puede **ser sustituida**
por cualquier elemento
de un **conjunto** dado.

52

Llamaremos

dominio

a este

conjunto de
sustitutos permisibles

para la indeterminada
o variable de una

proposición abierta.

53

Representación simbólica del **dominio**
de una ecuación.

$$3x + 4 = 10 \qquad x \in \mathbb{Z}$$

Debemos entender que, en este caso,
x **puede ser sustituida únicamente**
por números enteros.

54

Por ejemplo:

si x = 0,
de
la proposición abierta (ecuación)

3 x + 4 = 10

se origina
la proposición cerrada

que es V/F

$4 = 10$

F

55

Si x = − 1

la proposición abierta (ecuación)

3 x + 4 = 10

da origen a la proposición cerrada

que es V/F

$1 = 10$

F

56

Si x = − 2

la proposición abierta (ecuación)

3 x + 4 = 10

da origen a la proposición cerrada

que es V/F

$-2 = 10$

F

57

Si $x = -3$

la proposición abierta (ecuación)

$$3x + 4 = 10$$

da origen a la proposición cerrada

[ ]

que es V/F

$-5 = 10$

F

58

Atención.

Si $x = \frac{4}{3}$

la proposición abierta (ecuación)

$$3x + 4 = 10$$

da origen a la proposición cerrada

[ ]

que es V/F

Atención.

No se admite $\frac{4}{3}$

como sustituto para la variable x, puesto que se ha establecido como

dominio

el conjunto $\mathbb{Z}$, y

$\frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$

59

Si $x = 1$

la proposición abierta (ecuación)

$$3x + 4 = 10$$

da origen a la proposición cerrada

[ ]

que es V/F

$7 = 10$

F

60

Si $x = 2$

la proposición abierta (ecuación)

$$3x + 4 = 10$$

da origen a la proposición cerrada

que es V/F

$10 = 10$

V

61

Observamos que

hay por lo menos
un sustituto de x

para el cual
la proposición cerrada
resultante
es

verdadera.

62

Decimos que:

- 2 **satisface** la ecuación $3x + 4 = 10$

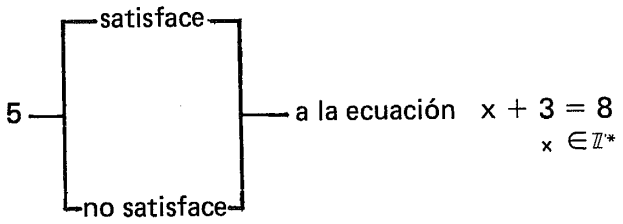
o que

- 2 es **solución** de la ecuación $3x + 4 = 10$

porque, para $x = 2$ la ecuación da origen
a la proposición cerrada $10 = 10$, que es **verdadera.**

63

Señalar la opción correcta.



puesto que

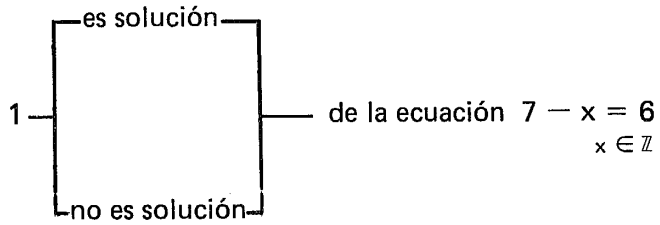
*$\mathbb{Z} = \{x | x$ es un número entero$\}$

satisface

$5 \in \mathbb{Z}$
y
$5 + 3 = 8$
$8 = 8$ ◄PCV

64

Señalar la opción correcta.



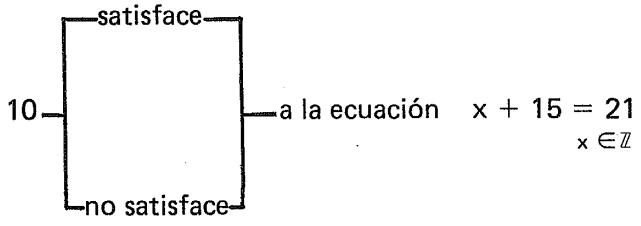
puesto que

es solución

$1 \in \mathbb{Z}$
y
$7 - 1 = 6$
$6 = 6$ ◄PCV

65

Señalar la opción correcta.



puesto que

no satisface

$10 \in \mathbb{Z}$
pero
$10 + 15 = 21$
$25 = 21$ ◄PCF

66

Señalar la opción correcta.

6 — satisface / no satisface — a la ecuación $7x - 12 = 5x$, $x \in \mathbb{Z}$

puesto que

_____

satisface

$6 \in \mathbb{Z}$
y
$7(6) - 12 = 5(6)$
$42 - 12 = 30$
$30 = 30$ ◄ PCV

67

Señalar la opción correcta.

3 — es solución / no es solución — de la ecuación $x(x - 2) = 3(x + 1)$, $x \in \mathbb{Z}$

puesto que

_____

no es solución

$3 \in \mathbb{Z}$
pero
$3(3 - 2) = 3(3 + 1)$
$3(1) = 3(4)$
$3 = 12$ ◄ PCF

68

Señalar la opción correcta.

4 — satisface / no satisface — a la ecuación $\frac{3x - 5}{7} = \frac{6 - x}{2}$, $x \in \mathbb{Z}$

puesto que

_____

satisface

$4 \in \mathbb{Z}$
y

$$\frac{3(4) - 5}{7} = \frac{6 - 4}{2}$$

$$\frac{12 - 5}{7} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{7}{7} = \frac{2}{2}$$

$1 = 1$ ◄ PCV

69

Señalar la opción correcta.

1 — [es solución / no es solución] — de la ecuación $\frac{x+5}{3} + \frac{5x-3}{2} - 3 = 0$, $x \in \mathbb{Z}$

puesto que

es solución

$1 \in \mathbb{Z}$

y

$$\frac{1+5}{3} + \frac{5(1)-3}{2} - 3 = 0$$

$$\frac{6}{3} + \frac{5-3}{2} - 3 = 0$$

$$2 + 1 - 3 = 0$$

$$3 - 3 = 0$$

$$0 = 0$$

▲ PCV

70

Señalar la opción correcta.

-7 — [satisface / no satisface] — a la ecuación $3x + 8 = 2x + 1$, $x \in \mathbb{Z}$

puesto que

satisface

$-7 \in \mathbb{Z}$

y

$3(-7) + 8 = 2(-7) + 1$

$-21 + 8 = -14 + 1$

$-13 = -13$ PCV

71

Señalar la opción correcta.

-5 — [es solución / no es solución] — de la ecuación $3x(x + 3) = 5(x - 2)$, $x \in \mathbb{Z}$

puesto que

no es solución

$-5 \in \mathbb{Z}$

pero

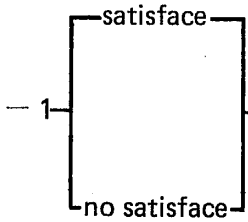
$3(-5)[(-5) + 3] = 5[(-5) - 2]$

$(-15)(-2) = 5(-7)$

$30 = -35$ ◄ PCF

72

Señalar la opción correcta.



a la ecuación $\dfrac{7(3x - 10) + 10}{9} = 9x$ $x \in \mathbb{Z}$

puesto que

satisface

$-1 \in \mathbb{Z}$

y

$$\frac{7[3(-1) - 10] + 10}{9} = 9(-1)$$

$$\frac{7(-3 - 10) + 10}{9} = -9$$

$$\frac{7(-13) + 10}{9} = -9$$

$$\frac{-91 + 10}{9} = -9$$

$$\frac{-81}{9} = -9$$

$-9 = -9$ ◂PVC

73

Volvamos al modelo que
hemos establecido para resolver el

acertijo de las edades.

$x = 2n^2$

es/no es solución de la ecuación

$n(x + n) - n(x - n) = x$

puesto que

Respuesta
en el
cuadro siguiente

es

$$n(2n^2 + n) - n(2n^2 - n) = 2n^2$$
$$2n^3 + n^2 - 2n^3 + n^2 = 2n^2$$
$$n^2 + n^2 = 2n^2$$
$$2n^2 = 2n^2 \text{ ◂PCV}$$

2.1.2.4

Práctica adicional,

con $x \in \mathbb{Z}$

si se considera necesario.

2.1.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* una ecuación como una proposición abierta de igualdad;
- *identificar* las no–proposiciones, las proposiciones abiertas y las proposiciones cerradas verdaderas o falsas, de un conjunto dado de expresiones algebraicas;
- *explicar* lo que es el dominio de una proposición abierta;
- *determinar* si un número entero dado satisface o es solución de una ecuación dada.

1.3

Práctica de sustitución*

*El estudio de este submódulo deberá emprenderse sólo si, en este punto del programa, **el alumno está capacitado** para el manejo de los números **reales** e **imaginarios.**

2.1.3.1

Breve repaso de:

- el conjunto de los racionales
- operaciones con racionales

si
se considera necesario.

74

Señalar la opción correcta.

3/5 — es solución / no es solución — de la ecuación $5x - 5 = -2$, $x \in \mathbb{Z}$

puesto que

no es solución

aunque

$$5\left(\frac{3}{5}\right) - 5 = -2$$
$$3 - 5 = -2$$
$$-2 = -2 \blacktriangleleft \text{PCV}$$

$$\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$$

75

Señalar la opción correcta.

5/2 — satisface / no satisface — a la ecuación $3x - 5 = x$, $x \in \mathbb{Q}$

puesto que

satisface

$\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$

y

$3\left(\frac{5}{2}\right) - 5 = \frac{5}{2}$

$\frac{15}{2} - 5 = \frac{5}{2}$

$\frac{15 - 10}{2} = \frac{5}{2}$

$\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$ ◄ PCV

76

Señalar la opción correcta.

-6 — es solución / no es solución — de la ecuación $3x + 5 = x - 7$, $x \in \mathbb{Q}$

puesto que

es solución

$-6 \in \mathbb{Q}$

y

$3(-6) + 5 = -6 - 7$

$-18 + 5 = -13$

$-13 = -13$ ◄ PCV

77

Señalar la opción correcta.

1/2 — satisface / no satisface — a la ecuación $3x - 2 = 2x - \frac{3}{2}$, $x \in \mathbb{Q}$

puesto que

satisface

$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

y

$3\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} - 2 = \frac{2}{2} - \frac{3}{2}$

$\frac{3 - 4}{2} = -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ ◄ PCV

78

Señalar la opción correcta.

3/4 — [es solución / no es solución] — de la ecuación $5(x-1) = 4 - 7x$, $x \in \mathbb{Q}$

puesto que

es solución

$\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$

y

$5\left[\left(\frac{3}{4}\right) - 1\right] = 4 - 7\left(\frac{3}{4}\right)$

$5\left(\frac{3-4}{4}\right) = 4 - \frac{21}{4}$

$5\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{16-21}{4}$

$-\frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$ ◀PCV

79

Señalar la opción correcta.

1/4 — [satisface / no satisface] — a la ecuación $\frac{3x-4}{5x+1} - \frac{5}{9} = -2$, $x \in \mathbb{Q}$

puesto que

satisface

$\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$ y

$\frac{3\left(\frac{1}{4}\right)-4}{5\left(\frac{1}{4}\right)+1} - \frac{5}{9} = -2$

$\frac{\frac{3}{4}-4}{\frac{5}{4}+1} - \frac{5}{9} = -2$

$\frac{3-16}{5+4} - \frac{5}{9} = -2$

$-\frac{13}{9} - \frac{5}{9} = -2$

$-\frac{18}{9} = -2$

$-2 = -2$ ◀PCV

80

Señalar la opción correcta.

0.5 — [es solución / no es solución] — de la ecuación $\frac{5(6x-3)}{x+1} + 10x - 5 = 0$, $x \in \mathbb{Q}$

puesto que

Respuesta en el cuadro siguiente

es solución

$0.5 \in \mathbb{Q}$
y

$$\frac{5(6 \times 0.5 - 3)}{0.5 + 1} + 10 \times 0.5 - 5 = 0$$

$$\frac{5(3 - 3)}{1.5} + 5 - 5 = 0$$

$$\frac{5(0)}{1.5} + 5 - 5 = 0$$

$$0 + 5 - 5 = 0$$

$$0 = 0 \blacktriangleleft \text{PCV}$$

81

Señalar la opción correcta.

0 — satisface / no satisface — a la ecuación $x^2 + 5x - 8 = 0$, $x \in \mathbb{Q}$

puesto que

no satisface

$0 \in \mathbb{Q}$
pero

$$(0)^2 + 5(0) - 8 = 0$$

$$0 + 0 - 8 = 0$$

$$-8 = 0$$

▲
PCF

82

Señalar la opción correcta.

$\sqrt{5}$ — es solución / no es solución — de la ecuación $x^2 - 5 = 0$, $x \in \mathbb{Q}$

puesto que

no es solución

$\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

2.1.3.2

Práctica adicional
con $x \in \mathbb{Q}$,
si
se considera necesario.

2.1.3.3

Breve repaso de:

- el conjunto de los reales
- operaciones con reales

si
se considera necesario.

83

Señalar la opción correcta.

$\sqrt{5}$ — es solución / no es solución — de la ecuación $x^2 - 5 = 0$, $x \in \mathbb{R}^*$

puesto que

_____

*$\mathbb{R} = \{x \mid x$ es un número real$\}$

es solución

$\sqrt{5} \in \mathbb{R}$
y
$\left(\sqrt{5}\right)^2 - 5 = 0$
$5 - 5 = 0$
$0 = 0$ ◄ PCV

84

Señalar la opción correcta.

$-\sqrt{5}$ [satisface / no satisface] a la ecuación $x^2 - 5 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

puesto que

satisface

$-\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

y

$(-\sqrt{5})^2 - 5 = 0$

$5 - 5 = 0$

$0 = 0$ ◄ PCV

85

Señalar la opción correcta.

$\sqrt[3]{2}$ [es solución / no es solución] de la ecuación $x^3 + 3 = 5$, $x \in \mathbb{R}$

puesto que

es solución

$\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$

y

$(\sqrt[3]{2})^3 + 3 = 5$

$2 + 3 = 5$

$5 = 5$ ◄ PCV

86

Señalar la opción correcta.

$\sqrt{3}$ [satisface / no satisface] a la ecuación $4x^2 + 3x = 0$, $x \in \mathbb{R}$

puesto que

no satisface

$\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

pero

$4(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3} = 0$

$4 \times 3 + 3\sqrt{3} = 0$

$12 + 3\sqrt{3} = 0$

▲

PCF

87

Señalar la opción correcta.

0 — es solución / no es solución — de la ecuación $4x^2 + 3x = 0$, $x \in \mathbb{R}$

puesto que

es solución

$0 \in \mathbb{R}$

y

$4(0)^2 + 3(0) = 0$

$0 + 0 = 0$

$0 = 0$

▲

PCV

88

Señalar la opción correcta.

$-3/4$ — satisface / no satisface — a la ecuación $4x^2 + 3x = 0$, $x \in \mathbb{R}$

puesto que

satisface

$-\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$

$4\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$

$4 \times \frac{9}{16} - \frac{9}{4} = 0$

$\frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0$

PCV ► $0 = 0$

89

Señalar la opción correcta.

2 — es solución / no es solución — de la ecuación $3x^4 - 20x = 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$

puesto que

es solución

$2 \in \mathbb{R}$

y

$3(2)^4 - 20(2) = 2(2)^2$

$3 \times 16 - 20 \times 2 = 2 \times 4$

$48 - 40 = 8$

$8 = 8$

▲

PCV

90

Señalar la opción correcta.

$-2-\sqrt{3}$ — satisface / no satisface — a la ecuación $x^2 + 4x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

puesto que

Respuesta en el cuadro siguiente

satisface

$\left(-2-\sqrt{3}\right) \in \mathbb{R}$

y

$(-2-\sqrt{3})^2 + 4(-2-\sqrt{3}) + 1 = 0$

$4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8 - 4\sqrt{3} + 1 = 0$

$8 - 8 = 0$

$0 = 0$

▲

PCV

91

Señalar la opción correcta.

$\sqrt{3}-2$ — es solución / no es solución — de la ecuación $x^2 + 4x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

puesto que

Respuesta en el cuadro siguiente

es solución

$(\sqrt{3}-2) \in \mathbb{R}$

y

$(\sqrt{3}-2)^2 + 4(\sqrt{3}-2) + 1 = 0$

$3 - 4\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{3} - 8 + 1 = 0$

$8 - 8 = 0$

$0 = 0$

PCV

92

Señalar la opción correcta.

$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ — satisface / no satisface — a la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

puesto que

Respuesta en el cuadro siguiente

satisface

$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$ y

$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = 0$

$\frac{9+6\sqrt{5}+5}{4} - \frac{3(3+\sqrt{5})}{2} + 1 = 0$

$\frac{14+6\sqrt{5}}{4} - \frac{9+3\sqrt{5}}{2} + 1 = 0$

$\frac{14+6\sqrt{5} - 2(9+3\sqrt{5}) + 4}{4} = 0$

$\frac{14+6\sqrt{5} - 18 - 6\sqrt{5} + 4}{4} = 0$

$18 - 18 = 0 \times 4$

$0 = 0 \blacktriangleleft$ PCV

93

Señalar la opción correcta.

$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ [es solución / no es solución] de la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

puesto que

Respuesta en el cuadro siguiente

es solución

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$$

y

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{9-6\sqrt{5}+5}{4} - \frac{3(3-\sqrt{5})}{2} + 1 = 0$$

$$\frac{14-6\sqrt{5}}{4} - \frac{9-3\sqrt{5}}{2} + 1 = 0$$

$$\frac{14-6\sqrt{5}-2(9-3\sqrt{5})+4}{4} = 0$$

$$14 - 6\sqrt{5} - 18 + 6\sqrt{5} + 4 = 0 \times 4$$

$$18 - 18 = 0$$

$$0 = 0 \blacktriangleleft \text{PCV}$$

94

Señalar la opción correcta.

$\sqrt{7}$ [satisface / no satisface] a la ecuación $x^2 + 7 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

puesto que

no satisface

$\sqrt{7} \in \mathbb{R}$

pero

$(\sqrt{7})^2 + 7 = 0$

$7 + 7 = 0$

$14 = 0$

▲

PCF

2.1.3.4

Práctica adicional
con $x \in \mathbb{R}$,
si
se considera necesario.

2.1.3.5

Breve repaso de:

- el conjunto de los complejos
- operaciones con complejos

si
se considera necesario.

95

Señalar la opción correcta.

2i — [es solución / no es solución] — de la ecuación $x^2 + 4 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

puesto que

no es solución

$2i \notin \mathbb{R}$

96

Señalar la opción correcta.

2i — satisface / no satisface — a la ecuación $x^2 + 4 = 0$, $x \in \mathbb{C}$ *

puesto que

_____

*$\mathbb{C} = \{x | x$ es un número complejo$\}$

satisface

$2i \in \mathbb{C}$

y

$(2i)^2 + 4 = 0$

$4i^2 + 4 = 0$

$4(-1) + 4 = 0$

$-4 + 4 = 0$

$0 = 0 \blacktriangleleft$ PCV

97

Señalar la opción correcta.

$-2i$ — es solución / no es solución — de la ecuación $x^2 + 4 = 0$, $x \in \mathbb{C}$

puesto que

_____

es solución

$-2i \in \mathbb{C}$

y

$(-2i)^2 + 4 = 0$

$4i^2 + 4 = 0$

$4(-1) + 4 = 0$

$-4 + 4 = 0$

$0 = 0 \blacktriangleleft$ PCV

98

Señalar la opción correcta.

$3i$ — es solución / no es solución — de la ecuación $x^3 = -9x$, $x \in \mathbb{C}$

puesto que

_____

es solución

$3i \in \mathbb{C}$

y

$(3i)^3 = -9(3i)$

$27i^3 = -27i$

$27i^2 \cdot i = -27i$

$27i = -27i$

▲

PCV

99

Señalar la opción correcta.

$-3i$ — satisface / no satisface — a la ecuación $x^3 = -9x$, $x \in \mathbb{C}$

puesto que

_____

satisface

$-3i \in \mathbb{C}$
y
$(-3i)^3 = -9(-3i)$
$-27i^3 = 27i$
$-27i^2.i = 27i$
$27i = 27i$
▲ PCV

100

Señalar la opción correcta.

0 — es solución / no es solución — de la ecuación $x^3 = -9x$, $x \in \mathbb{C}$

puesto que

_____

es solución

$0 \in \mathbb{C}$
y
$(0)^3 = -9(0)$
$0 = 0$ ◄ PCV

101

Señalar la opción correcta.

1 — satisface / no satisface — a la ecuación $x^2 + 6x + 10 = 0$, $x \in \mathbb{C}$

puesto que

_____

no satisface

$1 \in \mathbb{C}$
pero
$(1)^2 + 6(1) + 10 = 0$
$1 + 6 + 10 = 0$
$17 = 0$
▲ PCF

102

Señalar la opción correcta.

$-3+i$ { es solución / no es solución } de la ecuación $x^2+6x+10=0$, $x \in \mathbb{C}$

puesto que

es solución

$-3+i \in \mathbb{C}$

y

$(-3+i)^2+6(-3+i)+10=0$

$9-6i+i^2-18+6i+10=0$

$9+i^2-18+10=0$

$9+(-1)-18+10=0$

$9-1-18+10=0$

$19-19=0$

$0=0$

▲ PCV

103

Señalar la opción correcta.

$-3-i$ { satisface / no satisface } a la ecuación $x^2+6x+10=0$, $x \in \mathbb{C}$

puesto que

satisface

$-3-i \in \mathbb{C}$

y

$(-3-i)^2+6(-3-i)+10=0$

$9+6i+i^2-18-6i+10=0$

$9+i^2-18+10=0$

$9+(-1)-18+10=0$

$9-1-18+10=0$

$19-19=0$

$0=0$

▲ PCV

104

Señalar la opción correcta.

$\frac{1+2i}{2}$ { es solución / no es solución } de la ecuación $4x^2-4x+5=0$, $x \in \mathbb{C}$

puesto que

es solución

$\frac{1+2i}{2} \in \mathbb{C}$

y

$$4\left(\frac{1+2i}{2}\right)^2-4\left(\frac{1+2i}{2}\right)+5=0$$

$$4\,\frac{1+4i+4i^2}{4}-\frac{4(1+2i)}{2}+5=0$$

$1+4i-4-2(1+2i)+5=0$

$4i-3-2-4i+5=0$

$-5+5=0$

$0=0$

▲ PCV

105

Señalar la opción correcta.

$\frac{1-2i}{2}$ — satisface / no satisface — a la ecuación $4x^2 - 4x + 5 = 0$, $x \in \mathbb{C}$

puesto que

Respuesta en el cuadro siguiente

satisface

$\frac{1-2i}{2} \in \mathbb{C}$ y

$$4\left(\frac{1-2i}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1-2i}{2}\right) + 5 = 0$$

$$4\,\frac{1-4i+4i^2}{4} - \frac{4(1-2i)}{2} + 5 = 0$$

$$1 - 4i - 4 - 2(1-2i) + 5 = 0$$

$$-4i - 3 - 2 + 4i + 5 = 0$$

$$-5 + 5 = 0$$

$0 = 0$ ◄ PCV

106

Señalar la opción correcta.

$\frac{-1+\sqrt{11}i}{6}$ — es solución / no es solución — de la ecuación $3x^2 + x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{C}$

puesto que

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\frac{-1+\sqrt{11}\,i}{6} \in \mathbb{C} \quad y$$

$$3\left(\frac{-1+\sqrt{11}\,i}{6}\right)^2 + \frac{-1+\sqrt{11}\,i}{6} + 1 = 0$$

$$3\,\frac{1-2\sqrt{11}\,i+11i^2}{36} + \frac{-1+\sqrt{11}\,i}{6} + 1 = 0$$

$$\frac{1-2\sqrt{11}\,i-11}{12} + \frac{-1+\sqrt{11}\,i}{6} + 1 = 0$$

$$\frac{-2\sqrt{11}\,i-10+2(-1+\sqrt{11}\,i)+12}{12} = 0$$

$$-2\sqrt{11}\,i-10-2+2\sqrt{11}\,i+12 = 0$$

$$-12+12 = 0$$

$$0 = 0 \blacktriangleleft \text{PCV}$$

2.1.3.6

Práctica adicional
con $x \in \mathbb{C}$,
si
se considera necesario.

2.1.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* si un *número racional* dado satisface o no a una ecuación dada;
- *determinar* si un *número real* dado satisface o no a una ecuación dada;
- *determinar* si un *número complejo* dado satisface o no a una ecuación dada.

1.4

Conjunto solución

107

En una ecuación, al subconjunto
de todos los elementos del dominio
que satisfacen la ecuación
se le llama **conjunto solución**
o, también, **conjunto satisfactor**
o **conjunto de verdad.**

108

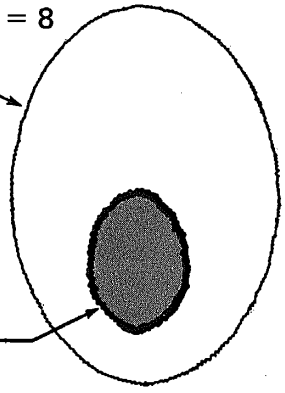
Sea una ecuación, por ejemplo: $x + 3 = 8$

Dominio:

todos los sustitutos permisibles
para la indeterminada o variable x.

Conjunto solución:

todos los elementos del dominio
que **satisfacen** la ecuación.



109

Hay dos maneras de simbolizar el **conjunto solución:**

- **por extensión** $S = \{$ elementos del dominio que satisfacen la ecuación $\}$
- **por comprensión** utilizando la **notación descriptiva** en que

Dominio ↓ ecuación ↓

$S = \{x \mid x \in D \text{ y } \underline{\quad\quad}\}$

$D = \{x \mid x \text{ es un sustituto permisible para } x\}$

110

Por ejemplo,
el conjunto solución

para la ecuación

$$x + 3 = 8$$
$$x \in \mathcal{R}$$

- es por comprensión:

$$S = \{x \mid x \in \mathcal{R} \wedge x + 3 = 8\}$$

- y, por extensión:

$$S = \{\underline{\quad\quad}\}$$

• 5

es el único número real que satisface la ecuación: $x + 3 = 8$

111

$$12 + x = 20$$
$$x \in \mathcal{R}$$

Conjunto solución:

- por compresión:

$$S = \{x \mid x \in \mathcal{R} \wedge 12 + x = 20\}$$

- por extensión:

$$S = \{\underline{\quad\quad}\}$$

8

es el único número real que satisface la ecuación $12 + x = 20$

112

$$x - 5 = 7 \qquad x \in \mathbb{R}$$

Conjunto solución:

- por comprensión:

- por extensión:

$S = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x - 5 = 7\}$

$S = \{12\}$

113

$$-6 - x = -13 \qquad x \in \mathbb{Z}$$

Conjunto solución:

- por comprensión:

- por extensión:

$S = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -6 - x = -/3\}$

$S = \{7\}$

114

$$18 - x = 20 \qquad x \in \mathbb{Z}$$

Conjunto solución:

- por comprensión:

- por extensión:

$S = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 18 - x = 20\}$

$S = \{-2\}$

115

$$x - 2 = \frac{3}{2}$$
$$x \in \mathbb{Z}$$

Conjunto solución:

- por comprensión:

- por extensión:

$S = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x - 2 = \frac{3}{2} \right\}$

$S = \phi$

116

Estudiar con atención antes de responder:

$$x = x + 1$$
$$x \in \mathbb{R}$$

Conjunto solución:

- por comprensión:

- por extensión:

$S = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x = x + 1 \}$

$S = \phi$

117

$$x + 3 = x + 2$$
$$x \in \mathbb{R}$$

Conjunto solución:

- por comprensión:

- por extensión:

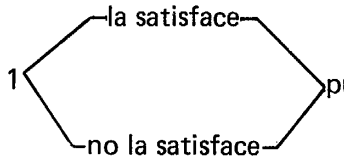
$S = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x + 3 = x + 2 \}$

$S = \phi$

118

Consideremos, ahora,
la ecuación

$$x^2 + x = x(x + 1)$$
$$x \in \mathbb{C}$$



la satisface

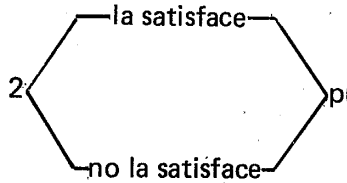
$(1)^2 + 1 = 1(1 + 1)$

$1 + 1 = 1 \times 2$

$2 = 2$ ◄ PCV

119

$$x^2 + x = x(x + 1)$$
$$x \in \mathbb{C}$$



la satisface

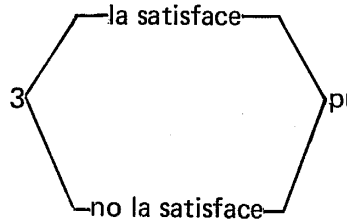
$(2)^2 + 2 = 2(2 + 1)$

$4 + 2 = 2 \times 3$

$6 = 6$ ◄ PCV

120

$$x^2 + x = x(x + 1)$$
$$x \in \mathbb{C}$$



la satisface

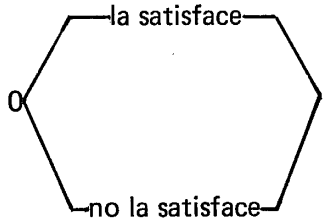
$(3)^2 + 3 = 3(3 + 1)$

$9 + 3 = 3 \times 4$

$12 = 12$ ◄ PCV

121

$$x^2 + x = x(x+1)$$
$$x \in \mathbb{C}$$



la satisface

$(0)^2 + 0 = 0(0+1)$

$0 + 0 = 0(1)$

$0 = 0$

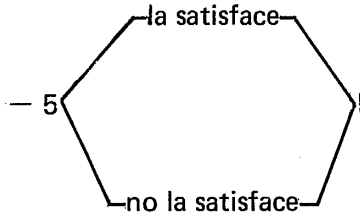
▲

PCV

122

$$x^2 + x = x(x+1)$$
$$x \in \mathbb{C}$$

Ensayemos sustitutos **enteros negativos,** por ejemplo:



la satisface

$(-5)^2 + (-5) = (-5)(-5+1)$

$25 - 5 = (-5)(-4)$

$20 = 20$

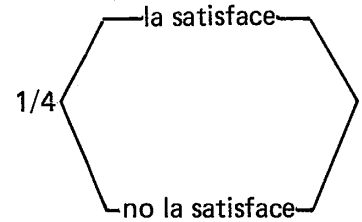
▲

PCV

123

$$x^2 + x = x(x+1)$$
$$x \in \mathbb{C}$$

Ensayemos **sustitutos fraccionarios,** por ejemplo:



la satisface

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + 1\right)$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+4}{4}\right)$$

$$\frac{1+4}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{16} = \frac{5}{16}$$

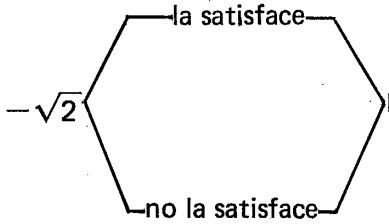
▲

PCV

124

$$x^2 + x = x(x+1) \qquad x \in \mathbb{C}$$

Ensayemos **sustitutos irracionales,** por ejemplo:



Respuesta en el cuadro siguiente

la satisface

$$(-\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\,(-\sqrt{2}+1)$$

$$2 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$$

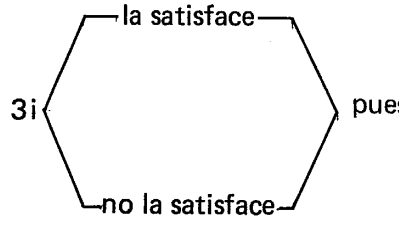
PCV

125

$$x^2 + x = x(x+1) \qquad x \in \mathbb{C}$$

Ensayemos **sustitutos imaginarios,**

por ejemplo:



la satisface

$$(3i)^2 + 3i = 3i(3i+1)$$

$$9i^2 + 3i = 9i^2 + 3i$$

$$-9 + 3i = -9 + 3i$$

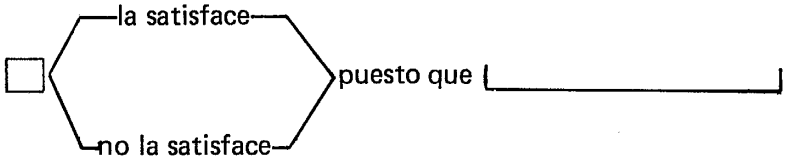
PCV

126

$$x^2 + x = x(x + 1)$$

$x \in \mathbb{C}$

Ensayemos **cualquier otro sustituto:**



Conclusión ⟶

Parece razonable concluir que
$x^2 + x = x(x + 1)$
es verdadera para cualquier sustituto
$x \in \mathbb{C}$
es decir
el **conjunto solución**

es igual al

dominio.

127

Observamos que en

$$x^2 + x = x(x + 1)$$

- las expresiones del primero y segundo miembros son **equivalentes;**
- la segunda ha sido obtenida **factorizando** la primera, mediante la aplicación de la propiedad **distributiva** de la multiplicación con respecto a la suma, es decir:
- la primera ha sido **transformada** en la segunda.

128

A las expresiones como esta

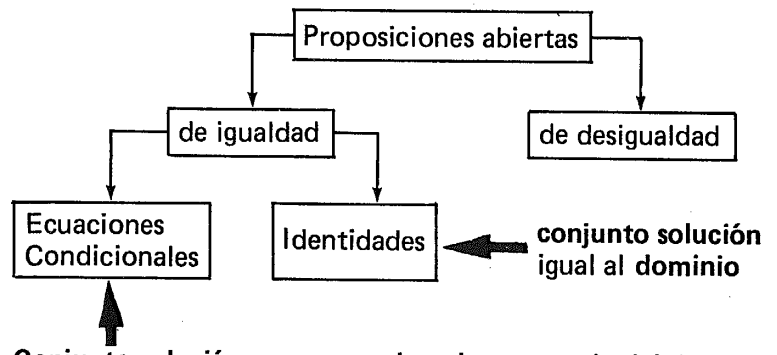
$$x^2 + x = x(x + 1)$$

para las que
el **conjunto solución**
es igual al **dominio**
las llamaremos

identidades.

129

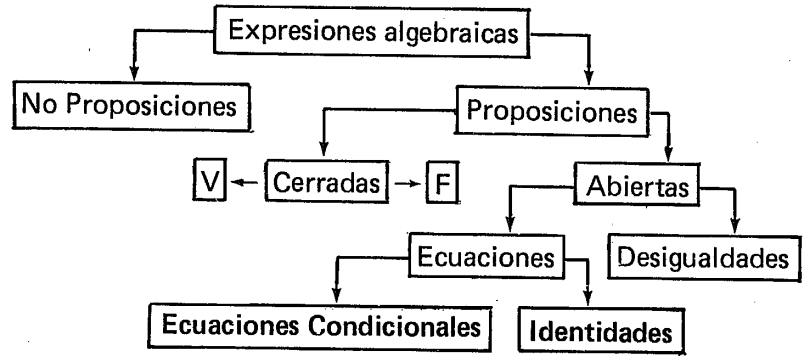
Observemos, entonces, este esquema.



Conjunto solución como un **subconjunto propio del dominio.**

130

Ubiquemos las identidades y las ecuaciones condicionales en nuestro esquema general.



131

Señalar la opción correcta.

La expresión algebraica

$$x + 3 \geqslant 5 - x$$

representa una:

1. No proposición ⌊__⌋
2. Proposición cerrada verdadera ⌊__⌋
3. Proposición cerrada falsa ⌊__⌋
4. Desigualdad ⌊__⌋
5. Identidad ⌊__⌋
6. Ecuación condicional ⌊__⌋

4. Desigualdad

132

La expresión algebraica

$$5 + 3 = 7 + 1$$

representa una:

1. No proposición
2. Proposición cerrada verdadera
3. Proposición cerrada falsa
4. Desigualdad
5. Identidad
6. Ecuación condicional

2. Proposición cerrada verdadera

133

La expresión algebraica

$$x^2 + 2x + 1$$

representa una:

1. No proposición
2. Proposición cerrada verdadera
3. Proposición cerrada falsa
4. Desigualdad
5. Identidad
6. Ecuación condicional

1. No proposición

134

La expresión algebraica

$$3 + 4 = 3 \times 4$$

representa una:

1. No proposición
2. Proposición cerrada verdadera
3. Proposición cerrada falsa
4. Desigualdad
5. Identidad
6. Ecuación condicional

3. Proposición cerrada falsa

135

La expresión algebraica

$$5(x + 3) = 5x + 15$$

representa una:

1. No proposición
2. Proposición cerrada verdadera
3. Proposición cerrada falsa
4. Desigualdad
5. Identidad
6. Ecuación condicional

● 5. Identidad

La expresión del primer miembro ha sido

transformada

en la del segundo, mediante multiplicación, utilizando la propiedad

distributiva

de la multiplicación con respecto a la suma.

136

La expresión algebraica

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

representa una:

1. No proposición
2. Proposición cerrada verdadera
3. Proposición cerrada falsa
4. Desigualdad
5. Identidad
6. Ecuación condicional

● 5. Identidad

Transformación efectuada:

factorización

137

La expresión algebraica

$$3x + 2x = 5x$$

representa una:

1. No proposición
2. Proposición cerrada verdadera
3. Proposición cerrada falsa
4. Desigualdad
5. Identidad
6. Ecuación condicional

● 5. Identidad

Transformación:

reducción de términos semejantes

(empleo de la propiedad **distributiva** de la multiplicación con respecto a la suma).

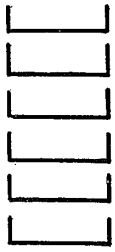
138

La expresión algebraica

$$\frac{4x^2 - 8}{2} = 2x^2 - 4$$

representa una:

1. No proposición
2. Proposición cerrada verdadera
3. Proposición cerrada falsa
4. Desigualdad
5. Identidad
6. Ecuación condicional



- 5. Identidad

Transformación:

división

(aplicación de la propiedad

distributiva
de la división
con respecto a la suma)

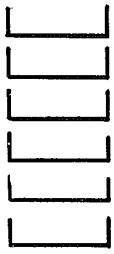
139

La expresión algebraica

$$x + 3 = 3 + x$$

representa una:

1. No proposición
2. Proposición cerrada verdadera
3. Proposición cerrada falsa
4. Desigualdad
5. Identidad
6. Ecuación condicional



- 5. Identidad

Transformación:
aplicación de la propiedad

conmutativa

de la adición.

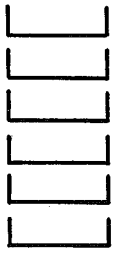
140

La expresión algebraica

$$(x + 3) + 5 = x + (3 + 5)$$

representa una:

1. No proposición
2. Proposición cerrada verdadera
3. Proposición cerrada falsa
4. Desigualdad
5. Identidad
6. Ecuación condicional



- 5. Identidad

Transformación:
aplicación de la propiedad
asociativa

de la adición.

2.1.4.1

Práctica adicional
de
identificación de
identidades,
si
se considera necesario.

141

Señalar la opción correcta.

La expresión algebraica

$$4x + 3 = x - 5$$

representa una:

1. No proposición ⌊___⌋
2. Proposición cerrada verdadera ⌊___⌋
3. Proposición cerrada falsa ⌊___⌋
4. Desigualdad ⌊___⌋
5. Identidad ⌊___⌋
6. Ecuación condicional ⌊___⌋

6. Ecuación condicional

142

Consideremos la ecuación

$$4(3x - 4) - 5x = 5$$

$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Se requiere determinar su **conjunto solución,**

es decir: $S = \{$ ▭ $\}$

143

El problema se reduce a

probar cada uno de los elementos del dominio

para determinar cuáles

satisfacen la ecuación.

144

$$4(3x - 4) - 5x = 5$$
$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

0 satisface/no satisface la ecuación
1 satisface/no satisface la ecuación
2 satisface/no satisface la ecuación
3 satisface/no satisface la ecuación
4 satisface/no satisface la ecuación

Por extensión:
$S = \{\quad\}$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$4(3x - 4) - 5x = 5$$
$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

0 satisface/(no satisface) la ecuación
1 satisface/(no satisface) la ecuación
2 satisface/(no satisface) la ecuación
3 (satisface/) no satisface la ecuación
4 satisface/(no satisface) la ecuación

Por extensión:
$S = \{3\}$

145

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

-2 es/no es solución de la ecuación
-1 es/no es solución de la ecuación
0 es/no es solución de la ecuación
1 es/no es solución de la ecuación
2 es/no es solución de la ecuación

Por extensión:

$S = \{\quad\quad\}$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

-2 (es)/no es solución de la ecuación
-1 es/ (no es) solución de la ecuación
0 es/ (no es) solución de la ecuación
1 es/ (no es) solución de la ecuación
2 (es)/no es solución de la ecuación

Por extensión:

$S = \{-2, 2\}$

2.1.4.2

Práctica adicional, si se considera necesario.

146

Ahora, consideremos la ecuación

$$\frac{5x + 8}{3x + 4} = \frac{5x + 2}{3x - 4}$$

$x \in \mathbb{R}^*$

Se requiere determinar su **conjunto solución.**

*Salvo restricciones.

147

$$\frac{5x + 8}{3x + 4} = \frac{5x + 2}{3x - 4}$$

$x \in \mathbb{R}$

Debemos darnos cuenta
de la **imposibilidad** de
probar todos los elementos
del dominio para determinar
cuáles **satisfacen** la ecuación.

148

Se plantea entonces,
la necesidad de disponer de

procedimientos de solución

que nos permitan determinar,
en la forma más rápida y segura posible,
el conjunto de verdad, o conjunto satisfactor,
o conjunto solución de una ecuación dada.

2.1.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *representar* simbólicamente, por extensión o por comprensión, el conjunto solución de una proposición abierta dada;
- *identificar* las identidades y las ecuaciones condicionales, de un conjunto dado de proposiciones abiertas de igualdad;
- *determinar* el conjunto solución de una ecuación dada, con dominio finito de baja cardinalidad, mediante la prueba de los sustitutos permisibles.

1.5

Ecuaciones equiva'entes

149

Podemos considerar los procedimientos de solución de ecuaciones como procedimientos de transformación de la ecuación original en una o varias

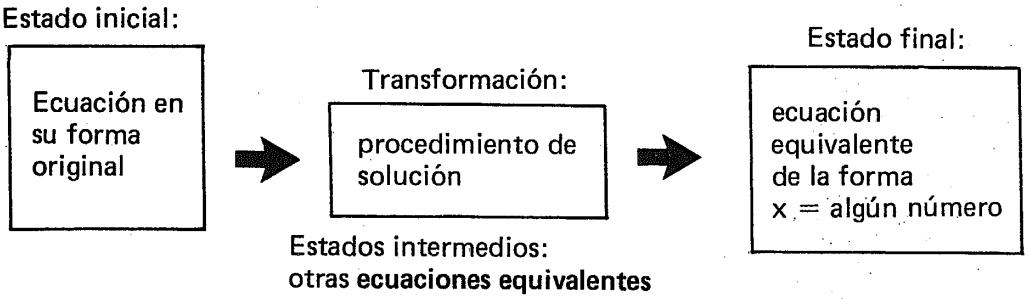
ecuaciones equivalentes

de la forma

x = algún número

150

Esquemáticamente:



151

Utilicemos como ejemplo la ecuación que ha servido de modelo para la solución del **acertijo de las edades:**

- Estado inicial: $\mathbf{n(x + n) - n(x - n) = x}$

  Estado intermedio 1: $nx + n^2 - nx + n^2 = x$

  Estado intermedio 2: $n^2 + n^2 = x$

  Estado intermedio 3: $2n^2 = x$

- Estado final: $\mathbf{x = 2n^2}$

152

$\mathbf{n(x + n) - n(x - n) = x}$

Multiplicación apoyada en distributividad x/+:

$nx + n^2 - nx + n^2 = x$

Reducción de términos semejantes:

$n^2 + n^2 = x$

Reducción de términos semejantes:

$2n^2 = x$

Propiedad simétrica de las igualdades:

$x = 2n^2$

Para "generar" estas

ecuaciones equivalentes

hemos aplicado algunas reglas de transformación ya conocidas.

153

Entonces, para "generar"

ecuaciones equivalentes

ecuaciones que tienen el **mismo conjunto solución**

usaremos las

reglas de transformación de expresiones algebraicas

y las

propiedades de las igualdades.

154

Recordemos algunas **reglas básicas de transformación** de expresiones algebraicas.

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *

que nos permite escribir

$$x + y + z.$$

Esta regla se conoce con el nombre de

[ ]

*Conjunto universo considerado: $\mathbb{C}$.

propiedad asociativa de la adición
o
asociatividad de la adición

155

2. $(xy)z = x(yz)$

que nos permite escribir

$$xyz.$$

Esta regla se conoce con el nombre de

[ ]

propiedad asociativa de la multiplicación
o
asociatividad de la multiplicación

156

3. $x + 0 = 0 + x = x$

A un elemento como este se le conoce con el nombre de

[ ]

elemento neutro o de identidad para la adición

157

4. $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

recordemos que a un elemento como este le llamamos

[ ]

elemento absorbente para la multiplicación

158

5. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

A un elemento con estas características lo conocemos con el nombre de

[ ]

elemento neutro o de identidad para la multiplicación

159

6. $x - 0 = x$

7. $0 - x = -x$

$x - 0 \neq 0 - x$

160

8. $x + (-x) = 0$

A un elemento como este le llamamos

inverso aditivo

161

9. $x - x = 0$

por ejemplo:

$5 + 3x^2 - 3x^2 =$ ____

5

162

Atención.

Escribir el nombre de la propiedad que se cumple en cada una de las expresiones algebraicas siguientes:

10. $x + y = y + x$

Propiedad: ____

conmutativa de la adición

163

11. $xy = yx$

Propiedad: [ ]

conmutativa
de la
multiplicación

164

12. $(x + y)z = xz + yz$

Propiedad: [ ]

distributiva

a la derecha

de la
multiplicación
con respecto
a la adición

165

13. $z(x + y) = zx + zy$

Propiedad: [ ]

distributiva

a la izquierda

de la
multiplicación
con respecto
a la adición

166

Ahora, escribir la expresión algebraica que corresponda a la propiedad enunciada:

14. [_____]

Propiedad **distributiva a la derecha** de la multiplicación con respecto a la sustracción.

$(x - y)z = xz - yz$

167

15. [_____]

Propiedad **distributiva a la izquierda** de la multiplicación con respecto a la sustracción.

$z(x - y) = zx - zy$

168

16. $x/1 = x$

Elemento [_____]

neutro o de identidad para la división

169

17. $0/x = 0$

puesto que

$x \cdot 0 =$ [_____]

0

170

18. $x/0$ = **número no definido**

puesto que:

cualquier número multiplicado por cero es igual a [_____]

cero

171

19. $x/x = 1$

$x \neq 0$

Para la división,
el inverso de x es [_____]

x

172

También conviene recordar que, en general:

20. $(x - y) - z \neq x - (y - z)$

No asociatividad de la sustracción.

21. $x - y \neq y - x$

No conmutatividad de la sustracción

173

Además:

22. $(x \div y) \div z \neq x \div (y \div z)$

o bien: $\dfrac{\frac{x}{y}}{z} \neq \dfrac{x}{\frac{y}{z}}$

No asociatividad de la división

174

También, por lo general:

23. $x \div y \neq y \div x$

o bien: $\dfrac{x}{y} \neq \dfrac{y}{x}$

No conmutatividad de la división.

175

24. $(x + y) \div z = (x \div z) + (y \div z)$

o bien: $\dfrac{x + y}{z} = \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}$

Distributividad a la derecha de la división con respecto a la adición.

176

25. $z \div (x + y) \neq z \div x + z \div y$

o bien: $\dfrac{z}{x + y} \neq \dfrac{z}{x} + \dfrac{z}{y}$

No distributividad a la izquierda de la división con respecto a la adición.

177

Propiedades de las igualdades:

A. $x = x$

Esta es la expresión algebraica de la propiedad **reflexiva.**

"Toda **expresión algebraica** es igual a sí misma."

178

B. Si x = y entonces y = x

Propiedad

simétrica,

que nos permite intercambiar los miembros de una ecuación.

179

C. Si x = y y y = z entonces x = z

Propiedad

transitiva:

"Dos **expresiones algebraicas** iguales a una tercera son iguales entre sí."

180

D. Si x + a = b y a = k entonces x + k = b

Si ax = b y a = k entonces kx = b

En estas dos expresiones se aplicó la propiedad

sustitutiva:

"Una **expresión algebraica** puede ser **sustituida** por otra equivalente."

181

E. Si x = y entonces x + a = y + a

Propiedad **aditiva.**

La aplicación de esta propiedad da lugar a

ecuaciones equivalentes.

182

F. Si x = y entonces x · a = y · a

$$a \neq \frac{b}{o}$$

Propiedad **multiplicativa.**

La aplicación de esta propiedad da lugar a

ecuaciones equivalentes

siempre que a ≠ 0. Por otra parte, 0 = 0 no es una

ecuación condicional,

sino una proposición cerrada.

183

G. Si ab = 0 entonces a = 0 o b = 0 o a = b = 0

Podríamos llamar a esta expresión,

propiedad **del producto nulo:**

"Si el producto de dos factores es igual a cero, cuando menos uno de los factores es igual a cero."

184

La aplicación
de
las propiedades enumeradas
da lugar a

ecuaciones equivalentes,

con la excepción señalada
en la propiedad **F** (multiplicativa).

185

En los ejercicios siguientes
intentaremos **identificar**
las **propiedades aplicadas**
para **transformar**
una **ecuación** dada,
en otra que sea o no
equivalente.

186

Ecuación dada:

$$5x + 8 = x$$

Ecuación transformada:

$$x = 5x + 8$$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada { es / no es } una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

B. Simétrica

$x = y \Rightarrow y = x$
es

187

Ecuación dada:

$x = 5$

Ecuación transformada:

$x + 4 = 9$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada — es / no es — una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

E. Aditiva

$x = y \Rightarrow x + a = y + a$

$a = 4$

es

188

Ecuación dada:

$x + 5 = 7$

Ecuación transformada:

$x = 2$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada — es / no es — una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

E. Aditiva

$x = y \Rightarrow x + a = y + a$

$a = -5$

es

189

Ecuación dada:

$x - 8 = 10$

Ecuación transformada:

$x = 18$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada — es / no es — una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

E. Aditiva

$x = y \Rightarrow x + a = y + a$

$a = 8$

es

190

Ecuación dada:

$3x + 2 = 5$

Ecuación transformada:

$3x = 3$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada es / no es una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

E. Aditiva

$x = y \Rightarrow x + a = y + a$

es $a = -2$

191

Ecuación dada:

$x = a$

además $a = 5$

Ecuación transformada:

$x = 5$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada es / no es una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

C. **Transitiva**

$x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$

D. **Sustitutiva**

es

192

Ecuación dada:

$x + k = 8$

además $k = 5$

Ecuación transformada:

$x + 5 = 8$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada es / no es una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

D. Sustitutiva

es

193

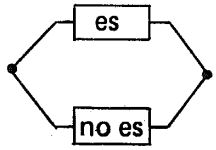
Ecuación dada:

$x + 3 = 5$

Ecuación transformada:

$4(x + 3) = 20$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada 

una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

F. Multiplicativa

$x = y \Rightarrow x \cdot a = y \cdot a$

$a = 4$

es

194

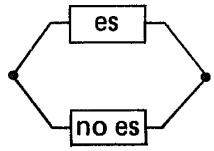
Ecuación dada:

$\frac{x}{6} = 5$

Ecuación transformada

$x = 30$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada 

una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

F. Multiplicativa

$x = y \Rightarrow x \cdot a = y \cdot a$

$a = 6$

es

195

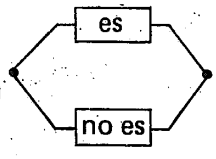
Ecuación dada:

$5x = 20$

Ecuación transformada:

$x = 4$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada 

una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

F. Multiplicativa

$x = y \Rightarrow x \cdot a = y \cdot a$

$a = \frac{1}{5}$

es

196

Ecuación dada:

$$-7x = 35$$

Ecuación transformada:

$$x = -5$$

Propiedad(es) aplicada(s): [ ]

La ecuación transformada — es / no es — una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

F. Multiplicativa

$x = y \Rightarrow x \cdot a = y \cdot a$

$$a = -\frac{1}{7}$$

es

197

Ecuación dada:

$$3x = 12$$

Ecuación transformada:

$$3x \cdot 0 = 0$$

Propiedad(es) aplicada(s): [ ]

La ecuación transformada — es / no es — una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

F. Multiplicativa

$x = y \Rightarrow x \cdot a = y \cdot a$

$a = 0$

no es
puesto que $0 = 0$ no es una ecuación.

198

Ecuación dada:

$$5x = 60$$

Ecuación transformada:

$$\frac{5x}{4-4} = \frac{60}{4-4}$$

Propiedad(es) aplicada(s): [ ]

La ecuación transformada — es / no es — una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

transformación no permitida, puesto que $4 - 4 = 0$

199

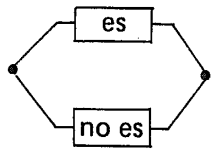
Ecuación dada:

$3x + 2x = 10$

Ecuación transformada:

$5x = 10$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada 

una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

- D. Sustitutiva

$3x + 2x = 5x$

o bien:
Reducción de términos semejantes

apoyada en:

12. Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición (a la derecha).

- es

200

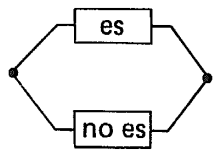
Ecuación dada:

$5(x + 4) = 7$

Ecuación transformada:

$5x + 20 = 7$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada 

una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

D. Sustitutiva

$5(x + 4) = 5x + 20$

o bien:

Multiplicación de un monomio por un polinomio

apoyada en:

13. Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición (a la izquierda).

- es

201

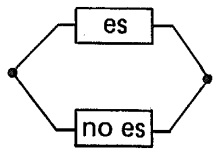
Ecuación dada:

$(x + 3)^2 = 5$

Ecuación transformada:

$x^2 + 6x + 9 = 5$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada 

una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

- **D. Sustitutiva**

$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

o bien:

Producto notable

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

apoyada en:

12, 13. Propiedad distributiva

- es

202

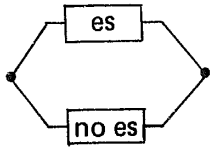
Ecuación dada:

$$ax + bx = c$$

Ecuación transformada:

$$(a + b)\,x = c$$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada  una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

D. Sustitutiva

$a\,x + bx = (a + b)\,x$

o bien:

Factorización apoyada en:

12. Propiedad distributiva

es

203

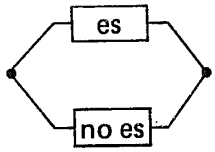
Ecuación dada:

$$3x + 5 + 2x + 1 = x$$

Ecuación transformada:

$$3x + 2x + 5 + 1 = x$$

Propiedad(es) aplicada(s): _____

La ecuación transformada  una **ecuación equivalente** a la ecuación dada.

D. Sustitutiva

$5 + 2x = 2x + 5$

o bien:

2. Propiedad conmutativa de la adición

es

2.1.5.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.1.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *señalar* las propiedades aplicadas para transformar una ecuación dada en otra equivalente;
- *determinar* si dos ecuaciones dadas son equivalentes o no.

1.6

Ecuaciones algebraicas

204

Podemos considerar

dos clases de **Ecuaciones**

Algebraicas:
sus dos miembros son **expresiones algebraicas**

Ejemplo:

$x^2 + 2x = x$

Trascendentes:
cuando menos uno de sus miembros es una **expresión trascendente** (matemática pero no algebraica)

Ejemplo:

$\text{Sen}\ (x + 1) = 0$

205

Algunos ejemplos de ecuaciones **algebraicas:**

1. $x + 10 = 27$
2. $3x + 7 = 2x - 5$
3. $3(x + 4) = 5(3x - 2)$
4. $\frac{x + 3}{5} + 10 = 5 - \frac{x}{6}$
5. $3x^2 - 5x + 4 = 0$
6. $5x^3 - 6x = 3$
7. $x^5 + 27 = 0$
8. $0.27x^7 - 0.13x^5 = 6.76$
9. $\sqrt{x - 2} + 3 = x + 6$
10. $3x + 4y = 5$
11. $x + y - z = 12$
12. $x = 5$

206

Algunos ejemplos de ecuaciones **trascendentes:**

1. $\operatorname{sen} 3x = 1 - x$
2. $\tan (45° - x) = 5$
3. $\cos \frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \operatorname{sen} x$
4. $\arctan (x - 4) = 1$
5. $(1 + e)^x = 5$
6. $5e^{-x} + 4 = \operatorname{sen} x$
7. $\log (x + 2) = 7 - x$
8. $a \ln\left(\frac{x - 2}{3}\right) = 5^x$
9. $5 \frac{d(x + 3)}{dx} + 4 = 5$
10. $\sqrt{\frac{1 + d(x - 2)}{dx}} = 0$
11. $5\int(x^2 - x + 3)dx = 18$
12. $\ln|\sec x + \tan x| = a$

207

Ecuaciones algebraicas
con
una variable

208

Recordemos que
a una expresión algebraica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots a_0$$

$n, n - 1, n - 2, \ldots \in \mathbb{N}$

le llamamos

polinomio con una
indeterminada o variable

209

$3x^4 - 2x^3 + 5x - 1$

es un
polinomio con coeficientes enteros
o
polinomio sobre $\mathbb{Z}$.

210

$\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 5x + \frac{7}{8}$

es un

_____

o

_____

polinomio con una indeterminada y coeficientes racionales

o

un polinomio sobre $\mathbb{Q}$

211

$\sqrt{5}\,x^2 - 8x + 3\sqrt{2}$

es un

_____

o

_____

polinomio con una indeterminada
y
coeficientes reales

o

un polinomio sobre $\mathbb{R}$

212

$3ix^3 - (2 + 5i)\,x + 5$

es un

[ ]

o

[ ]

polinomio con una indeterminada
y
coeficientes complejos

o

un polinomio sobre $\mathbb{C}$

213

En los ejercicios siguientes,
señalar la opción correcta y
completar la respuesta en caso necesario.

$x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 6x - 3$

Éste
- es un polinomio de [ ] grado
- no es un polinomio

es un polinomio de
cuarto grado

214

$5x^2 + 6x - 8$

Éste
- es un polinômio de [ ] grado
- no es un polinomio

es un polinomio de
segundo grado

215

$3x + 4$

Éste — es un polinomio del ___ grado
Éste — **no es** un polinomio

es un polinomio de **primer** grado

216

5

Éste — **es** un polinomio del ___ **grado**
Éste — **no es** un polinomio

es un polinomio de grado **cero** (recordemos que $5 = 5x^0$)

217

$(x + 2)(x - 3)$

Éste — es un polinomio del ___ grado
Éste — **no es** un polinomio

no es un polinomio;

(no es una expresión algebraica de la forma

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \ldots + a_0$)

218

$$x + \frac{1}{x}$$

Éste
- es un polinomio de ___ grado
- **no es** un polinomio

no es un polinomio;

(no es una expresión algebraica de la forma

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \ldots + a_0$,

con $n, n-1, n-2, \ldots \in \mathbb{N}$

219

$$\sqrt{x^2 + 5} + 3x - 1$$

Éste
- es un polinomio de ___ grado
- **no es** un polinomio

no es un polinomio;

es una
expresión con radicales
o
expresión irracional

220

$$\frac{x + 2}{x - 1}$$

Éste
- es un polinomio de ___ grado
- **no es** un polinomio

no es un polinomio;

es una
expresión racional

2.1.6.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

221

Ahora bien:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$$

$a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$ y $n, n-1, n-2, \ldots \in \mathbb{N}$

es la expresión general de lo que llamaremos

ecuación polinomia de grado n

con una variable o indeterminada.

222

Por lo tanto,

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$a_4 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$

es la expresión general de una

ecuación polinomia de [cuarto] **grado.**

223

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$a_3 \neq 0$, ai $\in \mathbb{C}$

es la expresión general de una

[ ]

ecuación polinomia de tercer grado

224

[ ] , ai $\in \mathbb{C}$

es la expresión general de una

ecuación polinomia de segundo grado.

$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$a_2 \neq 0$

225

[ ] , ai $\in \mathbb{C}$

es la expresión general de una

ecuación polinomia de primer grado.

$a_1x + a_0 = 0$

$a_1 \neq 0$

226

$3x - 6 = 0$

es una ecuación polinomia de primer grado. V / F

V

227

$3 - x^3 = 0$

es una ecuación polinomia de tercer grado. V / F

● V

aunque
los términos del
polinomio
no estén ordenados
y
aunque
el polinomio no esté
expresado en su forma
completa.

228

$10 - 6x^2 = 0$

es una ecuación polinomia de segundo grado. V / F

V

229

Diremos que
una **ecuación de primer grado** como esta

$$3x + 5 + 2x - 1 = 4x - 6$$

es una **ecuación polinomia de primer grado**
si al ser transformada en una **ecuación equivalente** de la forma

$$\mathbf{a_1 x + a_0 = 0}$$

resulta $a_1 \neq 0$

230

Observemos cuidadosamente el desarrollo.

Ecuación original:

$$\mathbf{3x + 5 + 2x - 1 = 4x - 6}$$

Por la propiedad aditiva:

$$3x + 5 + 2x - (1 - 4x + 6) = (4x - 6) - (4x + 6)$$
$$3x + 5 + 2x - 1 - 4x + 6 = 0$$

Por reducción de términos semejantes:

$$\mathbf{x + 10 = 0}$$

231

La ecuación

$$\mathbf{3x + 5 + 2x - 1 = 4x - 6}$$

en que los dos miembros son polinomios de primer grado,

es una ecuación polinomia de primer grado

porque puede ser transformada en la ecuación equivalente

$$\mathbf{x + 10 = 0}$$

de la forma

$$a_1 x + a_0 = 0, \text{ con } a_1 \neq 0.$$

232

La ecuación de primer grado

$$5x + 3 - x = 4x + 5$$

es una
ecuación polinomia de primer grado. V/F

• F

$$5x + 3 - x - \boxed{4x - 5} = 4x + 5 - \boxed{4x - 5}$$

$$\downarrow$$

$$-2 = 0$$

no es una ecuación polinomia;
ni siquiera
es una ecuación

233

De modo similar, diremos que
una ecuación de segundo grado
como esta

$$3x^2 + 5x = 2x^2 - 4$$

es una **ecuación polinomia**
de segundo grado
si al ser transformada en una
ecuación equivalente de la forma

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

resulta

$a_2 \neq 0$

234

$$3x^2 + 5x = 2x^2 - 4$$

es una

ecuación polinomia de segundo grado. V / F

• V

$$3x^2 + 5x = 2x^2 - 4$$

$$3x^2 + 5x - \boxed{2x^2 + 4} = 2x^2 - 4 - \boxed{2x^2 + 4}$$

$$\downarrow$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$a_2 \neq 0$

235

La ecuación de segundo grado

$$5x^2 + x = 5x^2 - 3$$

es una
ecuación polinomia de segundo grado V / F

● F

$5x^2 + x = 5x^2 - 3$

$5x^2 + x \boxed{- 5x^2 + 3}$

$= 5x^2 - 3 \boxed{- 5x^2 + 3}$

$x + 3 = 0$

236

Completar.

$$x + 3 = 0$$

es una ecuación

[_____]

polinomia de
primer grado

237

Señalar la opción correcta y
completar en caso necesario.
La ecuación de **tercer grado**

$$x^3 + 3x = x^3 + 5$$

- es una ecuación polinomia de [_____] grado
- no es una ecuación polinomia

● es una ecuación
polinomia de
primer grado

$x^3 + 3x = x^3 + 5$

↓

$3x - 5 = 0$

238

La ecuación de
cuarto grado

$$x^4 + x^2 = x^4 - x$$

- **es** una ecuación polinomia de [_____] grado
- **no es** una ecuación polinomia

- **es** una ecuación polinomia de **segundo** grado:

$$x^4 + x^2 = x^4 - x$$

$$\downarrow$$

$$x^2 + x = 0$$

239

La ecuación de **quinto grado**

$$x^5 + 4 = 10 + x^5$$

- **es** una ecuación polinomia de [_____] grado
- **no es** una ecuación polinomia

- **no** es una ecuación polinomia.

$$x^5 + 4 = 10 + x^5$$

$$\downarrow$$

$$4 = 10$$

240

Ahora bien, diremos que ecuaciones como

- $(x + 3)(x - 4) = 3(x - 1)$
- $\dfrac{x - 1}{x} = 4 - \dfrac{1}{x}$
- $\sqrt{x + 2} - x = 5$

no son ecuaciones polinomias

aunque puedan ser transformadas en ecuaciones polinomias equivalentes.

241

La **ecuación no polinomia**

$$(x + 3)(x - 4) = 3(x - 1)$$

puede ser transformada en
la ecuación polinomia de [ ] grado
equivalente:

[ ]

- **segundo** grado

$$(x+3)(x-4) = 3(x-1)$$
$$x^2 - x - 12 = 3x - 3$$
$$x^2 - x - 12 - 3x + 3 = 0$$
$$\downarrow$$
- $x^2 - 4x - 9 = 0$

242

La **ecuación no polinomia**

$$\frac{x-1}{x} = 4 - \frac{1}{x}$$

puede ser transformada en
la ecuación polinomia de [ ] grado
equivalente:

[ ]

- **primer** grado

$$\frac{x-1}{x} = 4 - \frac{1}{x}$$
$$\frac{x-1}{x} = \frac{4x-1}{x}$$
$$x - 1 = 4x - 1$$
$$x - 1 - 4x + 1 = 0$$
$$\downarrow$$
- $-3x = 0$

243

La **ecuación no polinomia**

$$x - \frac{1}{x} = 2$$

puede ser transformada en la ecuación
polinomia de [ ] grado equivalente:

[ ]

- **segundo** grado

$$x - \frac{1}{x} = 2$$
$$\frac{x^2 - 1}{x} = 2$$
$$x^2 - 1 = 2x$$
$$\downarrow$$
- $x^2 - 2x - 1 = 0$

244

La **ecuación no polinomia**

$$(x + 3)(x + 2) = x(x + 5)$$

puede ser transformada en la ecuación polinomia del ____ grado equivalente:

No puede ser transformada en una ecuación polinomia equivalente.

$(x + 3)(x + 2) = x(x + 5)$

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 5x$

$\downarrow$

$6 = 0$

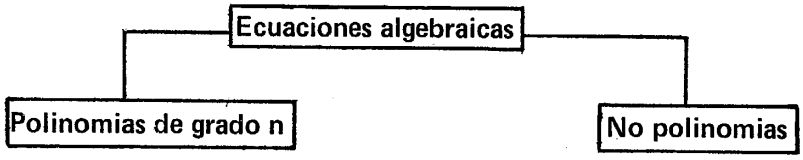
no es una ecuación

2.1.6.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

245

Distinguimos, entonces, dos clases de



Ejemplos:

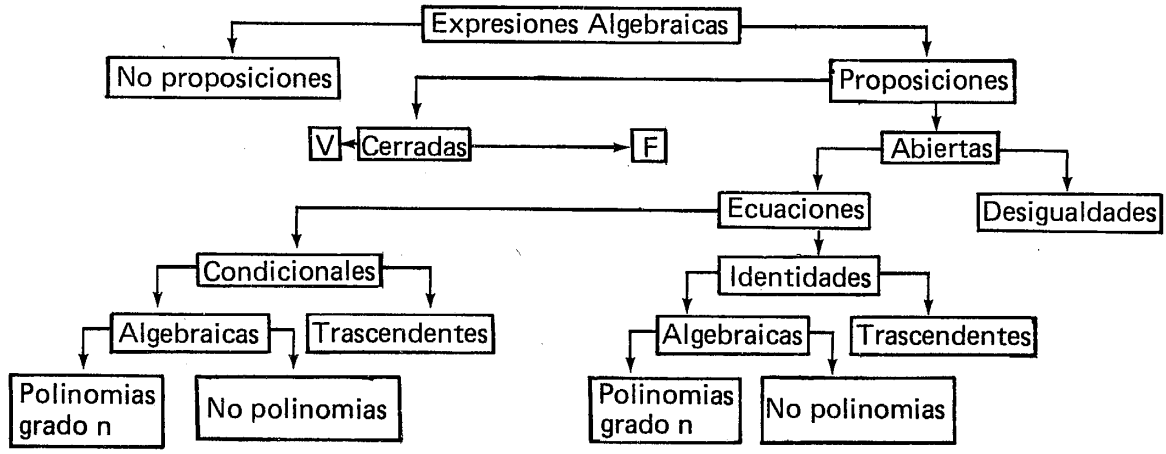
- $4x^2 - 3x + 1 = 0$
- $4x + 5 = 3x - 2$

Ejemplos:

- $(x - 3)(x - 1) = 3x$
- $\frac{x}{3} - \frac{1}{x} = x + 2$

246

Ubiquemos las ecuaciones algebraicas en nuestro esquema general.



247

Ya se ha demostrado que:

"Toda ecuación polinomia con coeficientes en $\mathbb{C}$ **tiene solución** en $\mathbb{C}$."

aunque no siempre puede encontrarse esa solución.

Esta proposición se conoce con el nombre de

Teorema fundamental del Álgebra.

248

Algunas ecuaciones no polinomias no tienen solución (su conjunto solución: $S = \phi$).
Por ejemplo, hemos visto que la ecuación

$$(x + 3)(x + 2) = x(x + 5)$$

tiene como expresión equivalente

$$6 = 0$$

que es una **proposición cerrada falsa** para cualquier valor de la variable o indeterminada x; de ahí que

$$\{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge (x + 3)(x + 2) = x(x + 5)\} = \phi$$

249

Se sabe, también, que:

"Toda ecuación polinomia de grado n tiene n soluciones o raíces."*

Por lo tanto:

- una ecuación polinomia de **primer grado** tiene **una solución**
- una ecuación polinomia de **segundo grado** tiene **dos soluciones**
- una ecuación polinomia de **tercer grado** tiene **tres soluciones**
- y así sucesivamente

*Un número puede ser considerado más de una vez como raíz.

2.1.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar* las ecuaciones algebraicas y las trascendentes, en un conjunto dado de proposiciones abiertas de igualdad;
- *identificar* las ecuaciones polinomias y las no polinomias, en un conjunto dado de ecuaciones algebraicas;
- *señalar* el grado de una ecuación polinomia;
- *transformar* una ecuación no polinomia sencilla en una ecuación polinomia, aplicando las propiedades de transformación estudiadas;
- *enunciar* el teorema fundamental del álgebra.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de mayo de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100